
INDEXNOTATION, RAUMKURVEN

Die *Indexnotation* ist eine extrem leistungsfähige Methode, um auch komplizierte Berechnungen mit Vektoren, Matrizen, Skalar- und Kreuzprodukten usw. durchzuführen. Sie ist effizient und hilft schon allein durch ihre Syntax, Fehler zu vermeiden. Für die meisten von Ihnen dürfte sie aber ungewohnt sein. Bitte üben Sie diese so oft und intensiv, wie möglich.

Raumkurven gehören zu den grundlegendsten Objekten, an denen die Physik interessiert ist – geht es doch oft und vor allem in der Mechanik um die Vorhersage von Bahnen von Masse„punkten“.

[P6] *Mehrfache Kreuzprodukte*

Schreiben Sie die Komponenten des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols. Lösen Sie damit folgende Aufgaben:

- (a) Berechnen Sie, wie sich das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ als Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} schreibt.

Hinweis: Versuchen Sie, den Ausdruck $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm}$ zu vereinfachen. Überlegen Sie auch anschaulich, warum das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ immer in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene liegt.

- (b) Beweisen Sie die Formel $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ in Index-Notation.

[P7] *Zeitabhängige Vektoren*

Eine Lichtquelle kreist mit festem Abstand r und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der xz -Ebene um die y -Achse. Das Licht fällt durch eine Lochblende, die sich parallel zur y -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, auf einen feststehenden Bildschirm, der senkrecht zur x -Achse im Abstand $2a$ zum Ursprung angeordnet ist. Dabei sei zum Startzeitpunkt $t = 0$ die Lichtquelle bei $(r, 0, 0)$ und die Lochblende bei $(a, 0, 0)$. Es sei $a > r$.

- (a) Erstellen Sie eine Skizze der Anordnung.
(b) Geben Sie die Bahnkurve der Lichtquelle an, sowie die Bahnkurve der Lochblende.
(c) Geben Sie nun den Lichtstrahl an, der zu einer Zeit t von der Lichtquelle durch die Lochblende geht. Vernachlässigen Sie dabei, dass Lichtausbreitung Zeit benötigt. Welche Bahnkurve beschreibt der Lichtstrahl auf dem Schirm?

[P8] *Überlagerte Kreise*

Gegeben sei eine Raumkurve $\vec{r}(t) \doteq R \begin{pmatrix} \cos \omega t - \sin^2 \omega t \\ \sin \omega t + \sin \omega t \cos \omega t \\ -\cos \omega t \end{pmatrix}$.

- (a) Was ist das für eine Kurve?
(b) Berechnen Sie $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ und daraus \vec{v}^2 .
(c) Vereinfachen Sie nun v^2 soweit, dass Sie v_{\max} einfach ablesen können.